Petre Simion Victor Nicolae

Memorator

Matematică
pentru clasele 9-12
• Algebră

NICULESCU

Descrierea CIP este disponibilă
la Biblioteca Națională a României

Bd. Regiei 6D, 060204 – București, România
Telefon: 021 312 97 82; Fax: 021 312 97 83
E-mail: editura@niculescu.ro
Internet: www.niculescu.ro

Comenzi online: www.niculescu.ro
Comenzi e-mail: comenzi.scoala@niculescu.ro
Comenzi telefonice: 0371 020 276, 0371 343 580, 0371 460 442, 021 312 97 82

Redactor: Lucian Călianu
Tehnoredactor: Șerban-Alexandru Popină
Coperta: Carmen Lucaci

Tipărit la FED Print S.A.

ISBN 978-973-748-975-3

Cuprins

Capitolul I

MULȚIMI ȘI ELEMENTE DE LOGICĂ MATEMATICĂ

1. Numere reale, ordonarea numerelor reale, modulul unui număr real. Operații cu numere reale

Informare și învățare!

$\mathbb{N}\subset\mathbb{Z}\subset\mathbb{Q}\subset\mathbb{R}$ (se notează $\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$ mulțimea numerelor iraționale!)

- Între două numere reale diferite $x < y$ există cel puțin un număr rațional r și cel puțin un număr irațional α: $x < r < y$ și $x < \alpha < y$.
- Oricare ar fi numerele reale $x > 0$ și y, există un număr natural n astfel ca $nx > y$ (*axioma lui Arhimede*).
- Modulul $|x|$ al unui număr x se definește astfel:

$$|x|=\begin{cases} x, & x>0 \\ 0, & x=0 \\ -x, & x<0 \end{cases} \quad \text{sau} \quad |x|=\begin{cases} x, & x\geq 0 \\ -x, & x\leq 0 \end{cases} \quad \text{sau} \quad |x|=\max(x,-x).$$

Proprietățile modulului

1) $|x|\geq 0$, $\forall\, x\in\mathbb{R}$.

2) $|x|^2=x^2=\left|(-x)^2\right|$, $\forall x\in\mathbb{R}$.

3) $|x|\geq x$, $\forall\, x\in\mathbb{R}$.

4) $|x|=|-x|$, $\forall\, x\in\mathbb{R}$.

5) $\big||x|-|y|\big|\leq|x+y|\leq|x|+|y|$, $\forall\, x,y\in\mathbb{R}$.

6) $|xy|=|x|\cdot|y|$, $\forall\, x,y\in\mathbb{R}$.

7) $\left|\dfrac{x}{y}\right|=\dfrac{|x|}{|y|}$, $\forall\, x\in\mathbb{R}, \forall\, y\in\mathbb{R}^*$.

8) $|x|=|y|\Leftrightarrow x=y$ sau $x=-y$.

Fie $\varepsilon > 0$. Atunci:

9) $|x| = \varepsilon \Leftrightarrow x = \varepsilon$ sau $x = -\varepsilon$.

10) $|x| \leq \varepsilon \Leftrightarrow x \in [-\varepsilon, \varepsilon]$.

11) $|x| \geq \varepsilon \Leftrightarrow x \in (-\infty, -\varepsilon] \cup [\varepsilon, \infty)$.

2. Operații cu intervale de numere reale. Aproximări prin lipsă sau prin adaos, partea întreagă şi partea fracționară a unui număr real

Informare şi învățare!

• Fie $x \in \mathbb{R}$. Se numeşte *partea întreagă* a numărului real x numărul întreg (unic) n pentru care $n \leq x < n+1$. Notăm $n = [x]$.
Diferența $x - [x]$ se numeşte *partea fracționară* a numărului x şi se notează $\{x\}$. Scriem $\{x\} = x - [x]$.
De exemplu:
$[3,21] = 3$; $[\pi] = 3$; $[-5,21] = -6$; $\{3,21\} = 0,21$; $\{-5,21\} = 0,79$.

Proprietăți:

1) $[x] \in \mathbb{Z}, \forall x \in \mathbb{R}$.

2) $[x] = x \Leftrightarrow x \in \mathbb{Z}$.

3) $x - 1 < [x] \leq x < [x] + 1, \forall x \in \mathbb{R}$.

4) $[x+p] = [x] + p, \ \forall x \in \mathbb{R}, \forall p \in \mathbb{Z}$.

5) $\{x\} \in [0,1), \forall x \in \mathbb{R}$.

6) $\{x+p\} = \{x\}, \forall x \in \mathbb{R}, \forall p \in \mathbb{Z}$.

7) $[x] + \left[x + \frac{1}{2}\right] = [2x], \forall x \in \mathbb{R}$.

• Dacă $x \in \mathbb{R}$, iar x' şi $x'' \in \mathbb{Q}$ sunt două aproximări ale sale prin lipsă, respectiv prin adaos, numerele $(x - x')$ şi $(x - x'')$ reprezintă erorile aproximării.

De exemplu, pentru $x = \sqrt{2}$, considerăm aproximările $x' = 1,414$, $x'' = 1,415$.
Avem evident $|x - x'| \leq |x' - x''| = 0,001$ şi $|x - x''| \leq |x' - x''| = 0,001$.
Spunem că x' (respectiv x'') aproximează pe x cu o eroare de cel mult 0,001, prin lipsă, respectiv prin adaos.

3. Propoziții logice, operații cu propoziții, predicate, cuantificatorul existențial şi universal

Informare şi învățare!

• Un enunț p care exprimă un adevăr se numeşte *propoziție adevărată*, iar dacă enunțul p exprimă un fals se numeşte *propoziție falsă*.
Oricărei propoziții p i se asociază o valoare de adevăr notată $v(p)$ dată de

$$v(p) = \begin{cases} 1, \text{ dacă } p \text{ este adevărată} \\ 0, \text{ dacă } p \text{ este falsă} \end{cases}.$$

Propozițiile se notează cu p, q, r, ..., iar compunerea lor se face cu ajutorul conectorilor logici: $\rceil p$ (non p), $p \vee q$ (p sau q), $p \wedge q$ (p şi q), $p \to q$ (p implică q) şi $p \leftrightarrow q$ (p echivalent cu q), definiți prin următoarele tabele de adevăr:

p	$\rceil p$
1	0
0	1

p	q	$p \vee q$
1	1	1
1	0	1
0	1	1
0	0	0

p	q	$p \wedge q$
1	1	1
1	0	0
0	1	0
0	0	0

p	q	$p \to q$
1	1	1
1	0	0
0	1	1
0	0	1

p	q	$p \leftrightarrow q$
1	1	1
1	0	0
0	1	0
0	0	1

• O formulă propozițională se numește *tautologie* dacă este adevărată oricare ar fi valoarea de adevăr a propozițiilor componente.
Exemple de tautologii:
1) $p \vee \rceil p$ – principiul terțiului exclus.
2) $\rceil(p \wedge \rceil p)$ – principiul noncontradicției.

• Două formule $\alpha(p_1, p_1, \ldots p_n)$ și $\beta(p_1, p_1, \ldots p_n)$ care au aceeași valoare de adevăr, indiferent de alegerea propozițiilor $p_1, p_1, \ldots p_n$ se numesc *echivalente* și se notează $\alpha = \beta$ sau $\alpha \equiv \beta$.

Legile lui De Morgan

1) $\rceil(p \wedge q) \equiv \rceil p \vee \rceil q$
2) $\rceil(p \vee q) \equiv \rceil p \wedge \rceil q$

• Un enunț care depinde de una sau mai multe variabile și are proprietatea că pentru orice valori date variabilelor îi corespunde o propoziție (adevărată sau falsă) se numește *predicat*. Acesta poate fi unar, binar etc. și se notează $p(x)$, $q(x, y)$ etc.
• Fie $p(x)$, $x \in E$, un predicat de variabilă x.

Mulțimea $S_{p(x)} = \{x_0 \in E \mid p(x_0) \text{ este propoziție adevărată}\}$ se numește valoarea de adevăr (sau mulțime de soluții) a predicatului $p(x)$.

Exemplu: Fie enunțul: $p(x): \dfrac{x+5}{2x-9} = 10$, $x \in \mathbb{Z}$.

Se observă că $p(5)$ este propoziție adevărată, iar $p(\alpha)$ cu $\alpha \in \mathbb{Z} \setminus \{5\}$ este propoziție falsă, deci $p(x)$ este predicat și mulțimea sa de adevăr este $S_{p(x)} = \{5\}$.
• Reguli de negație:
1) $\rceil(\exists x, p(x)) = \forall x, \rceil p(x)$,
2) $\rceil(\forall x, p(x)) = \exists x, \rceil p(x)$.

4. Relații și operații cu mulțimi corelate cu elemente de logică. Probleme de numărare

Informare și învățare!

O mulțime cu un număr finit de elemente se numește *mulțime finită*. Numărul elementelor unei mulțimi finite se notează $|A| = \text{card } A$ (cardinalul mulțimii A). Notăm cu $\mathscr{P}(T)$ mulțimea submulțimilor mulțimii T.

• Fie $A, B \in \mathscr{P}(T)$ mulțimi finite. Atunci produsul cartezian $A \times B$ este mulțime finită și $|A \times B| = |A| \cdot |B| = \text{card } A \cdot \text{card } B$.

Exemplu: Dacă $A = \{a, b, c\}$ și $B = \{x, y\}$, atunci $A \times B = \{(a, x), (a, y), (b, x), (b, y), (c, x), (c, y)\}$ și se verifică ușor că $|A \times B| = 6 = |A| \cdot |B|$.

Proprietăți

1) Dacă A, B sunt mulțimi finite și $A \subset B$, atunci $B \setminus A$ este finită și $|B \setminus A| = |B| - |A|$.
2) Dacă A, B sunt mulțimi finite și $A \cap B = \varnothing$, atunci $A \cup B$ este finită și $|A \cup B| = |A| + |B|$.
3) Dacă A este o mulțime finită, atunci $\mathscr{P}(A)$ este finită și $|\mathscr{P}(A)| = 2^{|A|}$.

Aplicații

1. Demonstrați că dacă A și B sunt mulțimi finite, atunci avem relația: $|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|$.

Demonstrație: Scriem $A \cup B = A \cup (B \setminus A)$ și cum $A \cap (B \setminus A) = \varnothing \Rightarrow$
$\Rightarrow |A \cup B| = |A| + |B \setminus A|$. Dar $B \setminus A = B \setminus (A \cap B)$ și cum $A \cap B \subset B \Rightarrow$
$\Rightarrow |B \setminus A| = |B| - |A \cap B|$ și, în final, $|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|$.

Folosind formula anterioară, se poate demonstra relația:

$$|A \cup B \cup C| = |A| + |B| + |C| - |A \cap B| - |A \cap C| - |B \cap C| + |A \cap B \cap C|.$$

2. Câte elemente are o mulțime A, dacă $\mathscr{P}(A)$ are 512 elemente?

Soluție: $2^{|A|} = 512$ și cum $512 = 2^9 \Rightarrow |A| = 9$.

3. Cu 10 bile (roșii și albe) se pot forma 24 de perechi alcătuite din câte o bilă albă și una roșie. Aflați câte bile albe și câte bile roșii sunt.

Soluție: Notăm cu A mulțimea bilelor roșii și cu B mulțimea bilelor albe. Observăm că: $A \cap B = \varnothing$, iar $A \times B$ reprezintă mulțimea perechilor de bile (una roșie și una albă).

Atunci:

$$\begin{cases} |A \cup B| = 10 \\ |A \times B| = 24 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} |A| + |B| = 10 \\ |A| \cdot |B| = 24 \end{cases}.$$

Se obțin două soluții: $\begin{cases} |A| = 6 \\ |B| = 4 \end{cases}$ sau $\begin{cases} |A| = 4 \\ |B| = 6 \end{cases}$.

5. Metoda inducției matematice

Informare și învățare!

Varianta I al principiului inducției matematice

Fie $A \subset \mathbb{N}$ cu proprietățile:

a) $0 \in A$;

b) dacă $n \in A$, atunci $n + 1 \in A$.

Atunci $A = \mathbb{N}$.

Aplicație

Demonstrați că $29^{2n+1} - 14^{2n+3} \,\vdots\, 15$, $(\forall)\, n \in \mathbb{N}$.

Soluție: Notăm P_n enunțul: $29^{2n+1} - 14^{2n+3} \,\vdots\, 15$ și $A = \{n \in \mathbb{N} \mid P_n$ este adevărată$\}$. Trebuie să demonstrăm că $A = \mathbb{N}$.

I. Se verifică ușor că $0 \in A$, adică P_0 este adevărată.

II. Demonstrăm că, dacă $n \in A$ (adică P_n adevărată), atunci $n + 1 \in A$ (adică P_{n+1} adevărată). Avem ipoteza P_n adevărată, adică:

$29^{2n+1} - 14^{2n+3} = 15 \cdot k_n \ (k_n \in \mathbb{Z}) \Rightarrow 29^{2n+1} = 15 \cdot k_n + 14^{2n+3}$, $k_n \in \mathbb{Z}$.

Atunci:

$29^{2(n+1)+1} - 14^{2(n+1)+3} = 29^{2n+1} \cdot 29^2 - 14^{2n+5} = (15 \cdot k_n + 14^{2n+3}) \cdot 29^2 -$
$- 14^{2n+5} = 15 \cdot k_n \cdot 29^2 + 14^{2n+3}(29^2 - 14^2) = 15\,(k_n \cdot 29^2 + 14^{2n+3} \cdot 43) \,\vdots\, 15$,
adică P_{n+1} este adevărată.

Conform principiului I al inducției matematice rezultă că $A = \mathbb{N}$, adică P_n este adevărată pentru orice $n \geq 0$.

Varianta a II-a a principiului inducției matematice

Fie $A \subset \mathbb{N}^*$ cu proprietățile:

a) $\{1, 2, \ldots, k\} \subset A$;

b) dacă $n \in \mathbb{N}$, atunci $n + k \in A$.

Atunci $A = \mathbb{N}^*$.

Capitolul II

PROGRESII

1. Noţiunea de şir; modalităţi de a defini un şir; şiruri mărginite, şiruri monotone

Informare şi învăţare!

Un şir se poate defini astfel:

1) descriptiv: $a_1 = 1$, $a_2 = \frac{1}{2}$, $a_3 = \frac{1}{3}$, ..., $a_n = \frac{1}{n}$, $n \in \mathbb{N}^*$;

2) prin termenul general: $a_n = 3n^2 + 1$, $n \in \mathbb{N}^*$;

3) printr-o relaţie de recurenţă: $x_{n+1} = x_n + a$, $n \in \mathbb{N}^*$, $a \in \mathbb{R}$ şi x_1 dat.

• Un şir $(a_n)_{n \geq 1}$ se numeşte *crescător* (respectiv *strict crescător*) dacă $a_n \leq a_{n+1}$ (respectiv $a_n < a_{n+1}$), $(\forall)\ n \in \mathbb{N}^*$.

• Un şir $(a_n)_{n \geq 1}$ se numeşte *descrescător* (respectiv *strict descrescător*) dacă $a_n \geq a_{n+1}$ (respectiv $a_n > a_{n+1}$), $(\forall)\ n \in \mathbb{N}^*$.

• Un şir $(a_n)_{n \geq 1}$ se numeşte *monoton* (respectiv *strict monoton*) dacă este crescător sau descrescător (respectiv strict crescător sau strict descrescător).

• Modalităţile principale prin care se arată că un şir este monoton sunt:

1) folosirea definiţiei;

2) calcularea valorii raportului $\frac{a_{n+1}}{a_n}$ şi comparaţia acestuia cu 1 (în cazul şirurilor cu termeni pozitivi);

3) calcularea diferenţei $a_{n+1} - a_n$ şi comparaţia acesteia cu 0;

4) prin inducţie matematică;

5) folosirea unor inegalităţi cunoscute sau prin diverse artificii.

• Un şir $(a_n)_{n \geq 1}$ se numeşte *mărginit* dacă există numerele reale m, M, astfel încât $m \leq a_n \leq M$, $(\forall)\ n \geq 1$. În caz contrar, şirul se numeşte *nemărginit*.

Modalităţile principale prin care se arată că un şir este mărginit sunt:

1) prin minorare sau majorare:

2) prin inducţie matematică;

3) folosind monotonia şirului;

4) folosind inegalităţi cunoscute sau diverse artificii.

2. Tipuri de şiruri: progresii aritmetice, progresii geometrice

Informare şi învăţare!

Progresii aritmetice

Un şir de numere reale în care fiecare termen, începând cu al doilea, se obţine din cel precedent prin adăugarea aceluiaşi număr (numit *raţie*) se numeşte *progresie aritmetică* şi se notează $\div\ a_1, a_2, \ldots a_n, \ldots$.

Proprietăţi:

1) $a_2 = a_1 + r$, $a_3 = a_2 + r$, ..., $a_n = a_{n-1} + r$, unde r este raţia progresiei;

2) $a_{n+1} - a_n = r$, $(\forall)\ n \in \mathbb{N}^*$;

3) $a_n = a_1 + (n-1)r$, $(\forall)\ n \in \mathbb{N}^*$;

4) $a_n = \frac{a_{n-1} + a_{n+1}}{2}$, $(\forall)\ n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$;

5) $a_1 + a_n = a_k + a_{n-k+1}$, $(\forall)\ k = \overline{1,n}$.

Dacă notăm $S_n = a_1 + a_2 + \ldots + a_n$, atunci:

6) $S_n = \frac{(a_1 + a_n) \cdot n}{2} = \frac{[2a_1 + (n-1)r] \cdot n}{2}$;

7) $S_{n+1} - S_n = a_{n+1}$, $(\forall)\ n \in \mathbb{N}^*$.

Progresii geometrice

Un şir de numere al cărui prim termen este nenul, iar fiecare termen al său începând cu al doilea se obţine din cel precedent prin înmulţirea cu acelaşi număr nenul (numit *raţie*) se numeşte *progresie geometrică* şi se notează $\div\!\div\ b_1, b_2, b_3, \ldots, b_n, \ldots$